НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ
(25 книжекъ).
Подъ редакціей препод. Моск. гимн. Ник. Аменицкаго.

Выпускъ 6-й.

Игра „Nim".

СОДЕРЖАНІЕ.

Введеніе. —
Описаніе игры. —
Теоретическое обоснованіе игры. —
Практическія указанія къ игрѣ. —
Видоизмѣненія игры „Nim". —
Отвѣты на задачи.

Цѣна 15 коп.

Москва.—1912.
Складъ изданія у кн-цы
А. С. ПАНАФИДИНОЙ.
Лялинъ пер., соб. домъ.

Вышли въ свѣтъ и продаются во **всѣхъ** книжныхъ магазинахъ:

НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

(25 книжекъ).

Подъ редакціей препод. Моск. гимн. ***Ник. Аменицкаго.***

1-й выпускъ

АРИѲМЕТИЧЕСКІЯ ИГРЫ.

Съ рисунками.

Содержаніе: Игра «взапуски».—Угадываніе задуманныхъ чиселъ и картинокъ.—Башня Люкаса.—Игра съ иглой.

Цѣна **15** коп. (48 стр.).

2-й выпускъ

Любопытныя путешествія.

Съ **22** рисунками.

Содержаніе: Кенигсбергскіе мосты.—Путешествіе Гамильтона.—О двухъ путникахъ.—Изъ Гавра въ Нью-Іоркъ.—Выгодный способъ передвиженія.—Собака и два пѣшехода.—Любопытныя переправы черезъ рѣку.

Цѣна **20** коп. (58 стр).

3-й выпускъ.

Морскіе узлы и фокусы съ веревками.
Что можно сдѣлать изъ листа бумаги.

Съ **86** рисунками.

Содержаніе: Морскіе узлы.—Фокусы съ веревками.—Превращенія съ кускомъ картона.—64 все равно, что 65.—Ослиный мостъ.—Китайскія головоломки.—Тѣневыя картины.

Цѣна **20** коп. (58 стр.).

4-й выпускъ.

Что можно сдѣлать изъ листа бумаги.

съ **84** рисунками. (Продолженіе).

Содержаніе: Игрушки изъ бумаги.—Бумажныя кольца.—Бумажная лѣстница.—Плетеніе изъ бумаги.—Превращенія куска бумаги.—Вертящаяся звѣзда.—Бумажныя модели геометрическихъ тѣлъ.—[illegible] бумаги.

Цѣна 2[illegible] коп. (56 стр.).

[illegible]

НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ и ШКОЛЫ
(25 книжекъ).
Подъ редакц. препод. Моск. гимн. НИК. АМЕНИЦКАГО.

Выпускъ VI-й.

Игра „Nim“.

Составилъ: ***Ник. Н. Аменицкій.***

СОДЕРЖАНІЕ:

Введеніе. — Описаніе игры. — Теоретическое обоснованіе игры. — Практическія указанія къ игрѣ „Nim“.—Видоизмѣненія игры „Nim“.—Отвѣты на задачи.

Цѣна 15 коп.

МОСКВА. — 1912.
Складъ изданія у кн-цы А. С. Панафидиной.
Лялинъ пер., соб. домъ.

МОСКВА.—1912.
Типографія РУССКАГО ТОВАРИЩЕСТВА.
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., соб. домъ.

Отъ редактора.

Имѣя въ виду все болѣе и болѣе возрастающій интересъ къ *такой* учебно-математической—литературѣ, которая затрагиваетъ живые и любопытные вопросы и вмѣстѣ съ тѣмъ возбуждаетъ любознательность, пытливость и самодѣятельность юныхъ читателей,—я полагаю, что предпринятое изданіе «*Научно-забавной библіотеки*» вполнѣ своевременно и желательно.

Стараясь дать интересный подборъ игръ и занятій, составители стремились придать изложенію таковыхъ возможно большую простоту и живость, слѣдя въ то же время и за тѣмъ, чтобы высказываемыя попутно мысли были болѣе или менѣе обоснованы, а *возможность* того или иного вопроса—была изслѣдована всесторонне.

Принимая все это во вниманіе, составители позволяютъ себѣ надѣяться, что «*Научно-забавная библіотека*», дѣйствительно, явится для учащейся молодежи средствомъ провести свой досугъ пріятно и съ пользой.

Ник. Аменицкій.

Въ непродолжительномъ времени ***выйдутъ въ свѣтъ****, между прочимъ,* ***слѣдующіе выпуски*** *«Научно-забавной библіотеки»*:

Вып. 7. Игра въ «15» (Taquin). — Игра «въ отшельника».

» 8. Эквилибристика (опыты, основанные на равновѣсіи тѣлъ).

» 9. Ходъ коня. — Шашки. — Домино.

» 10. Любопытные пріемы мышленія.

» 11. Домашняя механика и гидростатика.

» 12. Немного ученія о памяти.

» 13. Математическія шутки, вопросы и софизмы.

» 14. Опыты съ апельсинными корками.

» 15. Фокусы съ картами, основанные на ариѳметическихъ вычисленіяхъ.

» 16. Игра въ «мельницу».

» 17. Игры въ спички, ***и друг.***

„Игра Nim“.

1. Введеніе.

Въ 1-мъ выпускѣ «*Научно-забавной библіотеки*» наши читатели уже имѣли случай познакомиться съ такъ называемыми «математическими» играми, какъ напримѣръ: «игра взапуски», угадываніе задуманнаго числа и т. под. Эти игры, какъ, вѣроятно, убѣдился читатель, въ высшей степени просты и понятны, благодаря ихъ несложной и незамысловатой теоріи.

Въ настоящей книжкѣ мы намѣрены познакомить читателей съ *болѣе сложной* «математической» игрой, и поэтому, прежде чѣмъ приступить къ описанію этой игры, мы считаемъ нелишнимъ высказать нѣсколько общихъ мыслей и взглядовъ на «математическія» игры *вообще*.

Съ понятіемъ объ «игрѣ» у насъ связано представленіе о такомъ занятіи, которое преслѣдуетъ далеко не узкія цѣли: всякая игра должна быть не только занимательна, но и поучительна для для того, чтобы играющіе находили въ ней не только удовольствіе и развлеченіе, но и пользу. Въ такомъ, именно, смыслѣ мы и употребляемъ слово «игра», когда говоримъ: дѣтскія игры, музыкальная игра, драматическая игра, и т. д.

Предъявляя такія требованія къ «играмъ», мы, конечно, имѣемъ въ виду тѣ научно-образовательныя цѣли, которыя придаютъ особенную цѣнность всякой игрѣ.

Нѣкоторыя «математическія» игры для своего осуществленія на практикѣ требуютъ участія по крайней мѣрѣ двухъ лицъ, а это влечетъ за собою большей частью любопытное *соревнованіе* между играющими.

Тотъ, кто вздумаетъ заняться какой-либо изъ этихъ «игръ», не долженъ итти, какъ говорятъ, «напроломъ» къ заранѣе намѣченной цѣли. Вѣдь, такимъ путемъ обыкновенно стараются достичь цѣли только въ такъ называемыхъ «азартныхъ играхъ» и «счастливыхъ лотереяхъ», гдѣ главную роль играетъ *случай*, хотя иногда конечный результатъ зависитъ отчасти и отъ хитроумнаго веденія дѣла.

«Математическія» игры представляютъ полную противоположность играмъ «въ счастье», хотя и онѣ не вполнѣ освобождены отъ вліянія различныхъ случайныхъ обстоятельствъ *).

Называя игры «математическими», мы этимъ желаемъ сказать, что при разумномъ и осмысленномъ отношеніи къ такимъ играмъ возможно примѣненіе къ нимъ обычныхъ математическихъ методовъ, благодаря которымъ получаемые окончательные выводы могутъ отличаться точностью и опредѣленностью.

Тѣмъ не менѣе мы старались изложить теорію игры «Nim», по возможности, простымъ языкомъ,

---

*) Напримѣръ, лица, принимающія участіе въ игрѣ «Nim», выборъ «начальнаго» положенія предоставляютъ всецѣло случаю. Если оба игрока одинаково хорошо знакомы съ математической теоріей этой игры, то конечный результатъ ея (т.-е., выигрышъ или проигрышъ) зависитъ исключительно отъ «начальнаго» положенія, и, стало быть, сама игра принимаетъ характеръ чисто случайной игры «въ счастье».

не прибѣгая къ тому, чѣмъ такъ изобилуетъ любое математическое сочиненіе, а именно, къ особымъ обозначеніямъ, формуламъ и спеціальнымъ названіямъ.

Признано, что сущность любой математической игры уясняется изъ примѣра. Возьмемъ, хотя бы игру «Nim», описаніе которой помѣщено въ этой книжкѣ, и на которую мы уже разъ ссылались (см. примѣч. на пред. страницѣ).

Относительно простая теорія, но носящая математическій характеръ, несмотря на то, что она изложена далеко не спеціальнымъ языкомъ математики, доказываетъ, что въ громадномъ большинствѣ случаевъ *тотъ* изъ играющихъ, который дѣлаетъ *первый* ходъ, можетъ быть вполнѣ *увѣренъ* въ побѣдѣ, ожидающей его въ концѣ концовъ. Знаніе этой теоріи доставляетъ одному изъ играющихъ такое преимущество передъ его противникомъ (который, быть можетъ, и весьма опытенъ въ подобныхъ играхъ, и обладаетъ прекрасной сообразительностью, но незнакомъ съ теоріей игры), что состязаніе между такими врагами дѣлается похожимъ на сраженіе толпы дикарей, вооруженныхъ лукомъ и стрѣлами, съ прекрасно организованнымъ войскомъ, снабженнымъ новѣйшимъ огнестрѣльнымъ оружіемъ.

Но отсюда, конечно, вовсе не слѣдуетъ, что наибольшій интересъ съ математической точки зрѣнія представляютъ собою такія болѣе сложныя игры, какъ игра въ шахматы, для которой дать полную и законченную теорію не представляется возможнымъ уже по одному тому, что число различныхъ комбинацій ходовъ и фигуръ въ этой игрѣ чрезвычайно велико.

2. Описаніе игры „Nim“ и ея краткій теоретическій очеркъ.

Происхожденіе этой игры, собственно говоря, неизвѣстно.

Ее можно встрѣтить въ нѣкоторыхъ американскихъ школахъ и иногда на ярмаркахъ. Въ Германіи она извѣстна уже нѣсколько десятковъ лѣтъ большею частью подъ названіемъ «*Фанъ-Танъ*» («Fan-Tan»). Но такъ какъ подъ этимъ же названіемъ существуетъ также одна излюбленная китайцами игра, представляющая изъ себя ничто иное, какъ лотерею, то мы присвоимъ нашей игрѣ другое названіе, а именно „**Nim**“, которое было дано ей однимъ американскимъ математикомъ.

Игра «Nim» состоитъ въ слѣдующемъ:

Начинаютъ съ того, что устраиваютъ изъ спичекъ 3 кучки такъ, чтобы въ каждой кучкѣ было (какъ мы предположимъ первоначально для упрощенія дѣла) не больше **семи** и не менѣе 1 спички [1]). Одинъ изъ двухъ играю-

[1]) Мы сознательно употребляемъ выраженіе «куча изъ одной спички», имѣя въ виду дальнѣйшее разсужденіе, и предоставляемъ философамъ изслѣдованіе знаменитаго и спорнаго вопроса о томъ, къ какому наименьшему числу предметовъ можно примѣнить общепринятое понятіе «куча».

щихъ долженъ взять изъ какой-нибудь кучки любое число спичекъ, т.-е., по меньшей мѣрѣ, одну, или въ крайнемъ случаѣ всю кучку; при этомъ ему предоставляется право выбирать для этого ту или другую кучку спичекъ, но запрещается только брать спички одновременно изъ разныхъ кучекъ. Послѣ этого наступаетъ очередь другого играющаго, который долженъ сдѣлать то же самое, что и его противникъ, при чемъ онъ имѣетъ право брать спички или изъ той же кучки, или изъ какой-нибудь другой. Игра должна продолжаться до тѣхъ поръ, пока въ какой-либо кучкѣ имѣется на лицо хотя бы одна спичка. Побѣдителемъ считается тотъ, кому удастся взять послѣднюю спичку.

Для простоты разсужденія, мы условимся называть отдѣльныя операціи со спичками, совершаемыя тѣмъ или другимъ игрокомъ, первымъ, вторымъ и т. д. *ходомъ*.

При ознакомленіи съ описываемой игрой, для нашихъ читателей самымъ интереснымъ является вопросъ: кто изъ играющихъ можетъ (а можетъ быть, и *долженъ*) одержать побѣду?

Такъ какъ несомнѣнно, что, при соблюденіи всѣхъ вышеупомянутыхъ условій игры, одинъ изъ играющихъ *долженъ* выиграть, то мы и постараемся выяснить, *кто именно* можетъ оказаться такимъ счастливцемъ: тотъ ли, кто дѣлаетъ первый ходъ, или тотъ, кто дѣлаетъ второй ходъ.

Оказывается, что это зависитъ исключительно отъ того, какъ дѣло обстоитъ въ самомъ началѣ игры.

Конечно, какъ самый ходъ игры, такъ и ея конечный результатъ зависятъ отъ того числа спичекъ, которое имѣется въ трехъ кучкахъ. Поэтому мы будемъ обозначать *тремя* цифрами, напримѣръ 1, 4, 6, тотъ случай, или то «*положеніе*», когда въ одной кучкѣ лежитъ 1 спичка, въ другой—4 спички и въ третьей—6 спичекъ.

По причинамъ, которыя мы выяснимъ позднѣе, такія **семь** положеній, какъ:

1,2,3;
1,4,5;
1,6,7;
2,4,6; ...(**система** I)
2,5,7;
3,4,7;
3,5,6;

мы будемъ называть „**правильными**“, а всѣ остальныя положенія, какъ напримѣръ, 1, 4, 6, или 3, 4, 4—„**неправильными**“.

Читатель, конечно, понимаетъ, что число всѣхъ положеній вообще, т.-е., «правильныхъ» и «неправильныхъ» довольно значительно.

Если, напримѣръ, въ одной кучкѣ имѣется **2** спички, а въ другой—**4**, то «правильное» положеніе мы будемъ имѣть только въ томъ случаѣ, если въ третьей кучкѣ будетъ **6** спичекъ (см. сист. I). Во всѣхъ же другихъ случаяхъ, т.е., тогда, когда въ третьей кучкѣ будетъ лежать 1, 2, 3, 4, 5, или 7 спичекъ, мы будемъ получать «не-

правильныя» положенія. Дѣйствительно, вѣдь, только положеніе **2**, **4**, **6** встрѣчается въ помѣщенной выше **системѣ I**; положенія же: 2, 4, 1, или 2, 4, 2, или 2, 4, 3 и т. д. въ этой системѣ не встрѣчаются.

Между прочимъ, мы условимся еще въ слѣдующемъ: если во время игры окажется, что одна изъ кучекъ исчезла вовсе, то тогда мы будемъ называть «*правильными*» только *тѣ* положенія, въ которыхъ число спичекъ въ каждой изъ двухъ оставшихся кучекъ *совершенно одинаково;* всѣ же другія положенія при двухъ кучкахъ съ неодинаковымъ числомъ спичекъ будемъ считать «неправильными».

Наконецъ, всѣ положенія, въ составъ которыхъ входитъ всего лишь *одна* кучка, должны считаться «*неправильными*».

Итакъ къ помѣщенной ранѣе системѣ (I) «правильныхъ» положеній теперь мы присоединимъ еще слѣдующую:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{0,1,1;}\\ \mathbf{0,2,2;}\\ \mathbf{0,3,3;}\\ \mathbf{0,4,4;}\\ \mathbf{0,5,5;}\\ \mathbf{0,6,6;}\\ \mathbf{0,7,7.}\end{array}\right\}\ (\textbf{система II})$$

Само собою разумѣется, что положеніе: **0**, **0**, **0** придется считать «правильнымъ», такъ какъ по достиженіи такого результата одинъ изъ игроковъ получаетъ, какъ побѣдитель, пальму первенства.

Такимъ образомъ, считая и это послѣднее положеніе, у насъ оказалось всего **15** «правильныхъ» положеній, въ то время какъ простой подсчетъ показываетъ, что число «неправильныхъ» положеній доходитъ до 105. Выдѣливши такимъ образомъ всѣ «правильныя» положенія, мы можемъ заявить теперь слѣдующее:

Предложеніе 1. Переходъ отъ «правильнаго» положенія къ «неправильному» при помощи только одного хода возможенъ.

Предложеніе 2. Хотя отъ «неправильнаго» положенія посредствомъ одного хода и можно перейти къ весьма многимъ тоже «неправильнымъ» положеніямъ, тѣмъ не менѣе всегда существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно такое «правильное» положеніе, переходъ къ которому отъ даннаго «неправильнаго» также возможенъ.

Названія «*правильное*» и «*неправильное*», выбранныя нами, повидимому, совершенно произвольно, служатъ, какъ будто, только для того, чтобы было удобнѣе различать то или другое расположеніе спичекъ по кучкамъ. Но читатель скоро увидитъ, что эти названія выбраны въ высшей степени удачно, ибо окажется, что «*правильныя*» *положенія ведутъ игрока* ***всегда*** *къ побѣдѣ.* Вслѣдствіе этого, а также благодаря приведеннымъ выше двумъ **предложеніямъ**, мы получаемъ слѣдующее практическое *правило* для нашей игры:

Игрокъ долженъ стремиться къ тому, чтобы привести своимъ ходомъ игру къ одному изъ „правильныхъ“ положеній.

Если, напримѣръ, игрокъ А уже достигъ этого, то другой игрокъ В, который, на основаніи предложенія I, можетъ отъ «правильнаго» положенія перейти только къ «неправильному», долженъ нарушить создавшееся «правильное» положеніе. Но тогда А снова долженъ стараться найти способъ для перехода къ «правильному» положенію (на основаніи предложенія II), и такимъ образомъ, переходя отъ одного «правильнаго» положенія къ другому, А въ концѣ концовъ окажется побѣдителемъ.

---

3. Теоретическое обоснованіе игры.

Доказательство справедливости тѣхъ двухъ **предложеній**, которыя бездоказательно были приведены выше, читатель легко можетъ одолѣть при помощи слѣдующихъ разсужденій.

Докажемъ прежде всего **предложеніе I**.

Если мы изъ «правильныхъ» положеній, принадлежащихъ къ **системѣ II**, возьмемъ какое-нибудь одно, напримѣръ **0, 5, 5,** то увидимъ, что посредствомъ перваго же хода изъ него должно получиться «неправильное» положеніе. Дѣйствительно тутъ можетъ случиться только одно изъ двухъ: или какая-нибудь кучка исчезнетъ вовсе, или она уменьшится и перестанетъ быть равной другой. Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ возможны такіе, напримѣръ, результаты: **0, 0, 5,** или **0, 2, 5**; оба они, по нашему опредѣленію, относятся къ «неправильнымъ» положеніямъ.

Итакъ для «правильныхъ» положеній **системы II** предложеніе I можетъ считаться доказаннымъ.

Теперь обратимся къ положеніямъ **системы I.**

Возьмемъ, напримѣръ, положеніе **2, 5, 7,** При этомъ мы будемъ разсматривать только тѣ случаи, въ которыхъ ни одна изъ кучекъ не исчезаетъ вовсе, а только болѣе или менѣе уменьшается.

Если изъ первой кучки мы отнимемъ 1 спичку, то получится «неправильное» положеніе **1**, 5, 7, такъ какъ среди «правильныхъ» положеній, начинающихся съ 1 (см. **систему** I), нѣтъ такого, въ которомъ за 1 слѣдовали бы 5 и 7.

Если бы мы вздумали брать спички изъ второй кучки, то въ первой кучкѣ, во всякомъ случаѣ, остались бы 2 спички, а въ третьей—7 спичекъ. Но во всей системѣ I имѣется лишь одно такое положеніе, при которомъ въ 1-й и 3-й кучкахъ имѣется вышеупомянутое число спичекъ: это наше начальное положеніе—**2, 5, 7**. Такимъ образомъ, уменьшая вторую кучку, мы, безъ сомнѣнія, получимъ опять «неправильное» положеніе.

Относительно третьей кучки остается повторить совершенно такое же разсужденіе.

Теперь читателю нетрудно понять, что въ разсматриваемомъ вопросѣ особено *важно* слѣдующее обстоятельство: *система I правильныхъ положеній построена такъ, что какія-нибудь два числа, напримѣръ*, **3** *и* **7** *одновременно встрѣчаются только въ одномъ положеніи*, а именно въ положеніи **3**, **4, 7**.

Вернемся теперь нѣсколько назадъ съ тѣмъ, чтобы предложеніе, которое мы приняли сначала безъ доказательства, обосновать еще болѣе.

Для этого мы дадимъ такой, весьма наглядный пріемъ, который позволитъ читателямъ вполнѣ уяснить всѣ свойства **системы** I.

Вообразимъ, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 обозначаютъ членовъ какого-нибудь клуба; пусть фамиліи этихъ членовъ *соотвѣтственно* будутъ; Ивановъ, Петровъ, Семеновъ, Павловъ, Васильевъ, Николаевъ и Александровъ.

Эти господа встрѣчаются въ клубѣ съ тѣмъ, чтобы составить партію преферанса, при чемъ всегда играютъ втроемъ *).

Пусть различныя комбинаціи (или какъ мы ихъ называли раньше «положенія») изъ трехъ чиселъ, встрѣчающихся въ нашей системѣ I, всегда обозначаютъ тотъ или другой составъ партнеровъ.

Въ системѣ I всего 7 положеній; это въ точности соотвѣтствуетъ 7-ми днямъ недѣли; такъ что мы предположимъ, что въ теченіе недѣли каждый вечеръ въ клубъ является трое изъ перечисленныхъ лицъ, и это «тріо» усаживается за столъ съ тѣмъ, чтобы сыграть партію преферанса. Если мы воспользуемся системой I для составленія недѣльнаго расписанія для нашихъ «клубмэновъ», то получимъ слѣдующее:

Воскресенье:

Ивановъ (**1**), Петровъ (**2**), Семеновъ (**3**);

Понедѣльникъ:

Петровъ (**2**), Павловъ (**4**), Николаевъ (**6**);

Вторникъ:

Семеновъ (**3**), Павловъ (**4**), Александровъ (**7**);

Среда:

Ивановъ (**1**), Павловъ (**4**), Васильевъ (**5**);

---

*) Въ «преферансъ» (карточная игра) играютъ обыкновенно вчетверомъ, но, т. к. въ любой моментъ этой игры одинъ изъ 4-хъ партнеровъ бываетъ совершенно свободенъ, то эту игру можно вести и втроемъ.

Четвергъ:

Петровъ (**2**), Васильевъ (**5**), Александровъ (**7**);

Пятница:

Семеновъ (**3**), Васильевъ (**5**), Николаевъ (**6**);

Суббота:

Ивановъ (**1**), Николаевъ (**6**), Александровъ (**7**).

Разсматривая это расписаніе, мы замѣчаемъ слѣдующее: каждому изъ семи членовъ клуба приходится въ теченіе недѣли играть *три* раза *); при этомъ каждый изъ членовъ въ теченіе этой недѣли встрѣчается съ другимъ членомъ *только одинъ* разъ: въ первый разъ онъ видитъ двухъ членовъ, во второй разъ двухъ другихъ и въ третій разъ онъ встрѣчается съ двумя остальными сочленами. Такъ напримѣръ, г. Семеновъ участвуетъ въ игрѣ по воскресеньямъ, вторникамъ и пятницамъ, и въ воскресенье онъ встрѣчается съ г. Ивановымъ и г. Петровымъ, во вторникъ—съ г. Александровымъ и г. Павловымъ, а въ пятницу—съ г. Васильевымъ и г. Николаевымъ; однимъ словомъ онъ видитъ въ теченіе недѣли каждаго изъ партнеровъ только одинъ разъ.

Этимъ нагляднымъ представленіемъ того, какъ комбинируются между собою числа системы I, мы пока и удовлетворимся, такъ какъ теперь

*) Здѣсь совершенно не принимается во вниманіе, въ какомъ порядкѣ слѣдуютъ одно за другимъ посѣщенія одного и того же

справедливость предложенія I можетъ считаться доказанною, и перейдемъ къ доказательству **второго предложенія.**

Первая часть этого предложенія: любое «неправильное» положеніе можно перевести посредствомъ одного хода въ различныя другія, также «неправильныя» положенія,—почти не нуждается въ доказательствѣ; дѣйствительно, «неправильное» положеніе: 1, 2, 5 можно перевести, напр., въ слѣдующія:

1, 2, 4; 1, 2, 2; 1, 2, 1; 1, 2, 0; 0, 2, 5 и т. д.

«Но всякое «неправильное положеніе»—гласитъ далѣе наше предложеніе 2, «можетъ быть, посредствомъ одного хода переведено, хотя бы въ какое-нибудь одно «правильное» положеніе.

При наличности только *двухъ* кучекъ убѣдиться въ этомъ очень легко; если мы, напримѣръ, имѣемъ «неправильное» положеніе; 0, 4, 7, то для того, чтобы изъ него получить «правильное» положеніе, надо только уравнять 2-е и 3-е числа, уменьшивъ для этого большее изъ нихъ; такъ, отнявши изъ 3-й кучки 3 спички, мы получимъ «правильное» положеніе: **0, 4, 4**.

Если же дано «неправильное» положеніе только съ *одной* кучкой, напримѣръ 0, 0, 4, то здѣсь само собой разумѣется, останется только свести къ нулю третью кучку (т.-е., взять изъ нея 4 спички), и тотъ, кому придется это сдѣлать, можетъ

провозгласить себя побѣдителемъ, такъ какъ онъ пришелъ къ требуемому положенію: **0**, **0**, **0**. *).

Если же мы имѣемъ «неправильное» положеніе со всѣми *тремя* кучками, напримѣръ: 3, 6, 7, и допустимъ, что одна изъ этихъ кучекъ *исчезнетъ* вовсе, то тогда «правильнаго» положенія мы *ни въ коемъ случаѣ не получимъ*.

Такимъ образомъ, придется только уменьшать число спичекъ какой-либо кучки. Какъ бы мы ни уменьшили первую кучку, все равно количества спичекъ во 2-й и 3-й кучкахъ, т.-е., числа 6 и 7, останутся безъ измѣненія. Но единственное «правильное» положеніе, въ которое входятъ эти числа, есть **1**, **6**, **7** (см. систему I); слѣдовательно, изъ первой кучки *необходимо* отнять 2 спички (3—1=**2**.). Такимъ же образомъ найдемъ, что, отнимая изъ 2-й кучки 2 спички, или изъ третьей кучки—2 спички, мы будемъ въ состояніи получить слѣдующія «правильныя» положенія: **3**, **4**, **7** (въ первомъ случаѣ) и **3**, **6**, **5** (во 2-мъ случаѣ.).

Итакъ, на этомъ примѣрѣ мы убѣдились, что съ помощью одного изъ трехъ различныхъ ходовъ возможно данное «неправильное» положеніе перевести въ какое-либо (и притомъ, только одно) «правильное» положеніе.

Здѣсь мы получили даже три рѣшенія для нашей задачи, но для того, чтобы доказываемое предложеніе оказалось справедливо, намъ было бы вполнѣ достаточно, если бы получилось хотя бы *одно* рѣшеніе.

---

*) Читатель уже отсюда видитъ, что мы непроизвольно рѣшили считать положеніе 0, 0, 0 за «правильное», такъ какъ имѣли въ виду только что сдѣланный выводъ.

Теперь необходимо рѣшить вопросъ, *всегда ли* наша задача (т.-е., при всякомъ ли «неправильномъ» положеніи) имѣетъ **одно** рѣшеніе, такъ какъ, если мы обойдемъ этотъ вопросъ, то въ нашемъ доказательствѣ окажется существенный пробѣлъ; съ другой стороны, разсужденіе по этому поводу заставитъ читателя нѣсколько глубже вникнуть въ сущность математической теоріи описываемой игры. Читатель, который согласенъ отказаться отъ этого, можетъ пропустить остальную часть этого §-а и продолжать чтеніе прямо съ § 4.

Ранѣе мы уже затрагивали вопросъ о томъ, какими существенными свойствами отличаются «правильныя» положенія отъ «неправильныхъ», и какимъ путемъ получаются «правильныя» положенія, особенно тѣ, которыя принадлежатъ къ системѣ I.

Въ видѣ отвѣта на этотъ вопросъ, мы напомнимъ читателю прежде всего уже разсмотрѣнный нами въ одной изъ предыдущихъ бесѣдъ *) рядъ степеней числа 2, т.-е., рядъ, начинающійся съ 1 и состоящій изъ чиселъ, которыя идутъ, увеличиваясь вдвое: 1, 2, 4, 8, 16... Въ настоящемъ случаѣ мы воспользуемся только началомъ этого ряда: 1, 2, 4.

Далѣе мы напоминаемъ, что *всякое число можетъ быть представлено въ видѣ суммы чиселъ, взятыхъ изъ этого ряда* **), а именно, числа, интересующія насъ въ данномъ случаѣ: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

---

*) См. вып. 5-й «Научно-забавной библіотеки», стр. 66—70.
**) См. вып. 1-й «Научно-забавной библіотеки», стр. 21.

основн. числа:	4	2	1
1=			
2=		2	
3=		2	+1
4=	4		
5=	4		+1
6=	4	+2	
7=	4	+2	+1.

Мы будемъ снова, для краткости, какъ и раньше (см. вып. 1-й, стр. 21), называть числа **4, 2, 1** «*основными*» числами.

Возьмемъ какое-нибудь «правильное» положеніе системы I, напримѣръ **3, 4, 7** и разложимъ эти три числа по указанному выше способу:

3= 2+1
4=4
7=4+2+1.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что въ правыхъ частяхъ равенствъ встрѣчаются:

два раза **1**, *два* раза **2** и *два* раза **4**.

Если бы мы то же самое продѣлали со всѣми числами каждаго изъ положеній системы I, то увидали бы, **что для чиселъ любого „правильнаго“ положенія основныя числа: 1, 2 и 4 или входятъ въ разложенія по два раза каждое** (какъ въ нашемъ примѣрѣ), **или одно изъ этихъ чиселъ вовсе не встрѣчается**, какъ напримѣръ, для положенія **2, 4, 6:**

$$\mathbf{2} = 2$$
$$\mathbf{4} = 4$$
$$\mathbf{6} = 4 + 2,$$

гдѣ совершенно отсутствуетъ основное число **1**.

Ни въ одномъ изъ положеній системы I мы **никогда** не увидимъ, чтобы какое-нибудь изъ основныхъ чиселъ входило въ разложенія *одинъ или три раза*; это можетъ случиться только въ случаѣ чиселъ, взятыхъ изъ «неправильныхъ» положеній.

Для того, чтобы показать то же свойство примѣнительно къ положеніямъ **системы II**, слѣдуетъ только напомнить, что эти положенія содержатъ всегда, кромѣ 0, два *одинаковыхъ* числа, слѣдовательно, наше условіе относительно «основныхъ» чиселъ будетъ соблюдено само собою. Итакъ, нашему закону подчиняются лишь положенія, принадлежащія къ системѣ I и II, т.-е., всѣ «правильныя» положенія, и, если мы будемъ изслѣдовать въ этомъ отношеніи какое-либо положеніе, не относящееся къ системамъ I или II, а слѣдовательно «неправильное», то всегда найдемъ, что къ нему это свойство не примѣнимо.

Для примѣра возьмемъ положенія: 1, 2, 4 и 3, 6, 7, не принадлежащія къ «правильнымъ» положеніямъ, и, представляя ихъ въ видѣ суммы «основныхъ» чиселъ, получимъ:

$$1 = 1 \qquad 3 = 2 + 1$$
$$2 = 2 \qquad 6 = 4 + 2$$
$$4 = 4 \qquad 7 = 4 + 2 + 1.$$

Въ первомъ случаѣ «основныя» числа 1, 2 и 4 встрѣчаются по *одному* разу, а во второмъ случаѣ

числа 4 и 1 входятъ по два раза, число же 2—*три* раза; такимъ образомъ, вышеупомянутый законъ ни въ томъ, ни въ другомъ случаѣ оказывается не соблюденнымъ.

Остается только замѣтить, что положеніе 0, 0, 0, очевидно, подчиняется этому закону, а потому оно и можетъ быть причислено къ числу «правильныхъ» положеній (сравн. стр. 11).

Итакъ, мы имѣли вполнѣ опредѣленное основаніе называть нѣкоторыя изъ положеній «правильными»: оказывается, что это названіе примѣнимо къ такимъ положеніямъ, числа которыхъ могутъ быть представлены въ видѣ трехъ суммъ нѣкоторыхъ изъ «основныхъ» чиселъ, при чемъ любое изъ «основныхъ» чиселъ или входитъ въ эти три суммы два раза, или вовсе отсутствуетъ.

Кромѣ того на предыдущихъ примѣрахъ мы убѣдились, что всѣ «правильныя» положенія обладаютъ этимъ характернымъ свойствомъ, которое въ «неправильныхъ» положеніяхъ не обнаруживается.

Теперь придадимъ нашему изложенію болѣе общую и болѣе послѣдовательную форму и вмѣстѣ съ тѣмъ, въ видѣ отвѣта на одинъ изъ возбужденныхъ нами ранѣе вопросовъ, покажемъ пріемъ, благодаря которому можно составить *всѣ* возможныя «правильныя» положенія.

Для этого мы прежде всего воспользуемся принятымъ нами сначала безъ доказательства (см. стр. 15) свойствомъ системы I, состоящимъ въ томъ, что въ этой системѣ имѣется только *одно* положеніе,

въ которомъ какія-либо два числа встрѣчаются одновременно *).

Если мы возьмемъ, напримѣръ, «правильное», по нашему опредѣленію, положеніе, въ которомъ встрѣчаются числа **3** и **5**, то мы можемъ написать слѣдующее:

$$\begin{array}{l} \mathbf{3} = 2 + 1 \\ \mathbf{5} = 4 + 1. \\ \hline \end{array}$$

Такъ какъ здѣсь «основныя» числа **4** и **2** встрѣчаются только *одинъ* разъ, а число **1**—*два* раза, то *составъ третьяго числа легко предрѣшить заранѣе*: «основныя» числа должны въ него входить: **4**—*одинъ* разъ, **2**—*одинъ* разъ, а **1** должна отсутствовать, иными словами, это третье число должно быть равно $4+2=\mathbf{6}$.

Теперь наше положеніе, т.-е, **3**, **5**, **6** обладаетъ вышеупомянутымъ свойствомъ и, слѣдовательно, оправдываетъ свое названіе, въ подтвержденіе чего мы отсылаемъ читателя къ системѣ I, гдѣ онъ найдетъ полученное нами положеніе.

Такимъ путемъ *можно всегда по двумъ даннымъ числамъ найти третье число, которое вмѣстѣ съ двумя первыми составитъ «правильное» положеніе*; другими словами: **3**, **5**, **6** есть *единственное* «правильное» положеніе, въ которомъ числа **3** и **5** встрѣчаются вмѣстѣ.

Итакъ, мы пополнили теперь тотъ остававшійся пробѣлъ въ нашемъ доказательствѣ, на который было указано на стр. 20.

---

*) Напоминаемъ наше аналогичное разсужденіе о клубскихъ игрокахъ: любые два члена клуба въ теченіе недѣли встрѣчались другъ съ другомъ за карточнымъ столомъ не чаще, чѣмъ *одинъ* разъ.

На основаніи предыдущаго, можно заключить, что всѣ комбинаціи чиселъ *по два*, составленныя изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, послѣ присоединенія къ каждой изъ нихъ надлежащаго третьяго числа будутъ давать въ результатѣ каждый разъ «правильное» положеніе.

Для этого вовсе не нужно брать *каждую* изъ упомянутыхъ комбинацій чиселъ по два. Нашъ пріемъ будетъ сокращенъ, если мы укажемъ на то, что, исходя теперь изъ двухъ данныхъ чиселъ **3** и **6** (какъ раньше изъ **3** и **5**), мы найдемъ, конечно, и третье число **5**, т.-е., придемъ къ тому же самому «правильному» положенію, которое мы уже имѣли ранѣе; такъ что, очевидно, мы ничего не потеряемъ, если отбросимъ вовсе комбинацію: **3** и **6**.

Благодаря такому упрощенію, мы легко можемъ исчерпать весь запасъ, который заключается въ системѣ I, и тогда будетъ ясно, что кромѣ положеній, составляющихъ системы I и II (включая сюда и положеніе 0, 0, 0) другихъ положеній, удовлетворяющихъ необходимому условію для полученія «правильнаго» положенія, мы получить не можемъ.

Изъ предыдущаго не трудно видѣть, какъ совершается переходъ отъ «неправильнаго» положенія къ «правильному».

Такъ какъ мы предполагаемъ, что начальное положеніе «неправильное», то въ разложеніяхъ чиселъ, входящихъ въ его составъ, встрѣчается одинъ или три раза *по крайней мѣрѣ одно* изъ «основныхъ» чиселъ: **4**, **2**, **1**, потому что въ противномъ случаѣ положеніе было бы «правильнымъ».

Обратимъ вниманіе на «основныя» числа, которыя встрѣчались въ разсмотрѣнныхъ уже ранѣе (стр. 22) примѣрахъ:

$$3 = 2 + 1$$
$$6 = 4 + 2$$
$$7 = 4 + 2 + 1.$$

Прежде всего замѣтимъ, что «основное» число **4** встрѣчается здѣсь два раза. Это не вноситъ ничего новаго; но «основное» число **2** входитъ три раза, тогда какъ число **1**—опять два раза; такимъ образомъ,—установленный нами порядокъ нарушается только числомъ **2**. Въ такомъ случаѣ мы должны уменьшить на 2 спички или первую, или вторую, или третью кучку. Съ каждымъ изъ этихъ трехъ возможныхъ случаевъ мы уже имѣли случай встрѣчаться (см. стр. 19) и при этомъ всегда приходили въ концѣ концовъ къ одному изъ положеній системѣ I.

Возьмемъ теперь первый изъ разсмотрѣнныхъ на стр. 22 примѣровъ:

$$1 = 1$$
$$2 = 2$$
$$4 = 4.$$

Уже то обстоятельство, что одно изъ «основныхъ» чиселъ **4** встрѣчается здѣсь всего *одинъ* разъ, показываетъ, что необходимое условіе для «правильности» положенія не выполнено; поэтому это число мы замѣнимъ другимъ (2+1), тѣмъ болѣе, что остальныя два «основныхъ» числа входятъ въ наши разложенія тоже по одному разу.

Тогда окажется, что число **4** будетъ вовсе отсутствовать, а числа **2** и **1** будутъ встрѣчаться въ разложеніяхъ по *два* раза.

На практикѣ все то, что мы сейчасъ сказали, означаетъ слѣдующее: третью кучку (4) слѣдуетъ уменьшить на одну спичку, благодаря чему мы получимъ «правильное» положеніе **1**, **2**, **3**.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ возможность только однимъ способомъ перейти отъ положенія 1, 2, 4 къ «правильному» положенію, потому что нужно только уменьшать число спичекъ, а не увеличивать, и кромѣ того это уменьшеніе можно произвести одновременно лишь съ одной кучкой, а не съ нѣсколькими.

Намъ пришлось поступить именно такъ, какъ указано, во-первыхъ, въ виду того, что въ данномъ случаѣ было желательно измѣнить самое большое изъ «основныхъ» чиселъ, т.-е., **4**, встрѣчавшееся въ разложеніи одинъ разъ, и, во-вторыхъ, въ виду того, что два другихъ числа, т.-е., **2** и **1**, входили въ разложенія также по одному разу.

Нетрудно понять, что такой пріемъ возможенъ всегда, а потому мы въ правѣ теперь считать, что пробѣлъ, допущенный при доказательствѣ предложенія II (см. стр. 20) теперь восполненъ вполнѣ.

---

4. Практическія указанія къ игрѣ „Nim".

Благодаря предыдущимъ разсужденіямъ (особенно важенъ въ этомъ отношеніи конецъ § 2-го), теперь мы располагаемъ слѣдующими указаніями при осуществленіи нашей игры на практикѣ: такъ какъ число «неправильныхъ» положеній значительно больше числа «правильныхъ» положеній, то начальное положеніе, выбираемое совершенно произвольно*), бываетъ большей частью «неправильнымъ».

Игрокъ **A**, начинающій игру, приводитъ это «неправильное» положеніе къ «правильному». Другой игрокъ **B** можетъ снова изъ «правильнаго» положенія сдѣлать «неправильное», которое тогда **A** приведетъ опять къ «правильному».

Такимъ образомъ, если **A** будетъ продолжать свою тактику до конца, то онъ *непремѣнно* выиграетъ.

Итакъ, при произвольно выбранномъ «неправильномъ» начальномъ положе-

*) Для назначенія того или другого начальнаго положенія играющіе должны или бросить жребій и прибѣгнуть къ какому-нибудь другому пріему; лучше всего обратиться къ третьему лицу, непричастному къ игрѣ и незнакомому съ ея теоріей, и попросить его дать какое-либо «начальное» положеніе.

ніи (а на дѣлѣ почти всегда такъ и бываетъ) и при нормальномъ теченіи самой игры **долженъ** выиграть **тотъ, кто начинаетъ** игру.

Если же начальное положеніе **„правильное“**, и если игра ведется съ соблюденіемъ всѣхъ условій, то **выигрываетъ тотъ, кто дѣлаетъ второй ходъ.**

Самый процессъ игры можно показать наглядно на примѣрѣ, при чемъ мы будемъ нумеровать ходы игроковъ и помѣщать всякое положеніе, которое получается у каждаго изъ игроковъ послѣ его хода.

Начальное положеніе: 4, 5, 6

A	**B**
1) 3, 5, 6	3, 5, 4
2) 1, 5, 4.	1, 4, 4.

A можетъ теперь взять изъ первой кучки послѣднюю спичку и создать такимъ образомъ «правильное» положеніе съ двумя и при томъ одинаковыми кучками (сист. II):

3) 0, 4, 4. | 0, 2, 4.

A беретъ теперь изъ большей кучки столько спичекъ, чтобы снова уравнять количество спичекъ 3-й кучки и 2-й кучки:

4) 0, 2, 2	0, 1, 2
5) 0, 1, 1.	0, 1, 0
6) 0, 0, 0,	

и **A** выигрываетъ.

Само собой разумѣется, что число 7, выбранное, какъ maximum, для числа спичекъ каждой кучки было взято нами исключительно въ цѣляхъ простоты разсужденія. Читатель, желающій отрѣшиться отъ этого числа, легко можетъ самъ, на основаніи выводовъ § 3, *продолжить* составленіе системъ «правильныхъ» положеній.

Взявши, напримѣръ, одну кучку въ **7** спичекъ, а другую въ **9** спичекъ, мы прибавимъ къ нашей системѣ еще одно «правильное» положеніе, представивши числа 7 и 9 при помощи «основныхъ» чиселъ, среди которыхъ теперь, кромѣ **1**, **2** и **4**, встрѣтится еще число **8**.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} 7 &= 4+2+1. \\ 9 &= 8 +1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что третье число начальнаго положенія должно быть: $8+4+2=$**14**; слѣдовательно, мы имѣемъ новое «правильное» положеніе: **7, 9, 14.**

Если число спичекъ въ игрѣ достигло 15 штукъ (для одной кучки), то приведенная нами выше **система** «правильныхъ» положеній видоизмѣнится такъ:

1, 2, 3;	**2, 4, 6;**	**3, 4, 7;**	**4, 8, 12;**
1, 4, 5;	**2, 5, 7;**	**3, 5, 6;**	**4, 9, 13;**
1, 6, 7;	**2, 8, 10;**	**3, 8, 11;**	**4, 10, 14;**
1, 8, 9;	**2, 9, 11;**	**3, 9, 10;**	**4, 11, 15;**
1, 10, 11;	**2, 12, 14;**	**3, 12, 15;**	
1, 12, 13;	**2, 13, 15;**	**3, 13, 14;**	
1, 14, 15;			

5, 8, 13;	**6, 8, 14;**	**7, 8, 15;**
5, 9, 12;	**6, 9, 15;**	**7, 9, 14;**
5, 10, 15;	**6, 10, 12;**	**7, 10, 13;**
5, 11, 14;	**6, 11, 13;**	**7, 11, 12.**

Отсюда можно, конечно, перейти снова къ системѣ такихъ положеній, которыя содержатъ только *двѣ* кучки съ одинаковымъ числомъ спичекъ.

Игру «Nim» можно вести и не только съ тремя кучками, а и при большемъ числѣ ихъ, но мы не совѣтуемъ нашимъ читателямъ дѣлать это, такъ какъ тогда теорія игры существенно измѣнится.

Можно также ввести такое правило, *что тотъ, кто беретъ послѣднюю спичку, проигрываетъ*. Въ этомъ случаѣ наша теорія по существу остается въ силѣ; но тутъ получится нѣкоторое затрудненіе, состоящее въ томъ, что, благодаря такому нововведенію, эта теорія не упрощается, а, наоборотъ, усложняется.

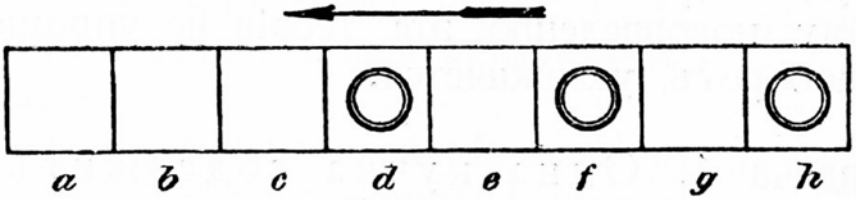
Задача 1. Одна кучка содержитъ 7, а другая 25 спичекъ. Сколько спичекъ должно быть въ третьей кучкѣ, чтобы положеніе было «правильнымъ»?

Задача 2. Кто долженъ выиграть, при соблюденіи всѣхъ правилъ игры, если начальное положеніе: **3, 17, 18**?

5. Видоизмѣненія игры „Nim".

I. Въ болѣе упрощенномъ видѣ игра «Nim», облеченная въ другую форму, была предложена въ видѣ задачи читателямъ одной изъ газетъ.

Здѣсь мы ограничимся только разсмотрѣніемъ одного простого случая этого видоизмѣненія игры «Nim», а именно, при томъ же наибольшемъ числѣ предметовъ, какъ и прежде, т.-е., 7-ми, и для этого облечемъ нашу игру въ форму задачи такого же рода, но совершенно спеціальнаго характера.



Въ одномъ изъ рядовъ шахматной доски, состоящемъ, стало быть, изъ 8 полей, на поляхъ d, f и h находятся 3 шашки (см. рис.). **Два игрока A и B должны стараться посредствомъ своихъ ходовъ, которые они дѣлаютъ поочередно, перевести эти шашки на послѣднее поле a, соблюдая слѣдующія правила: каждый изъ играющихъ имѣетъ право дѣлать ходъ любой изъ трехъ шашекъ, (которую онъ при каждомъ ходѣ**

можетъ выбирать произвольно) и при томъ не иначе какъ по направленію стрѣлки (т.-е., справа налѣво); остановиться со своей шашкой онъ можетъ вездѣ, гдѣ только пожелаетъ, не выходя, конечно, изъ предѣла данныхъ 8 полей. Такимъ образомъ, шашку можно ставить даже на то поле, которое уже занято другой шашкой, и переносить ее черезъ стоящія на пути шашки.

Тотъ, кто поставитъ на поле a послѣднюю шашку, считается побѣдителемъ.

Читатель безъ труда можетъ убѣдиться въ томъ, что идея этой игры остается та же, какъ и въ игрѣ «Nim».

Дѣйствительно, обозначимъ разстоянія послѣдняго поля **a** до поля **b** черезъ 1, до поля **d**—черезъ 3, до поля **f**—черезъ 5 и, наконецъ, до поля **h**—черезъ 7.

Тогда начало игры вполнѣ характеризуется положеніемъ 3, 5, 7; иными словами, наши 3 шашки соотвѣтствуютъ тремъ кучкамъ въ игрѣ «Nim».

Поступательное движеніе шашекъ, по направленію стрѣлки, къ послѣднему полю соотвѣтствуетъ въ той же игрѣ убыванію числа спичекъ въ трехъ кучкахъ.

Такъ какъ всѣ правила новой игры, какъ видитъ читатель, вполнѣ совпадаютъ съ описанной передъ этимъ игрой «Nim», то мы можемъ теперь воспользоваться тѣми результатами, которые были получены нами ранѣе.

Начальное положеніе мы въ правѣ изобразить посредствомъ «основныхъ» чиселъ такъ:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4+{}} 2+1; \\ 5 &= 4 +1; \\ 7 &= 4+2+1. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, имѣемъ «неправильное» положеніе, такъ какъ 1 входитъ *три* раза; но если мы одну изъ кучекъ уменьшимъ на 1, то это положеніе превратится въ «правильное». Слѣдовательно, играющій **A** для своего перваго хода можетъ избрать одинъ изъ трехъ ходовъ: **d—c**, или **f—e**, или **h—g**.

Возьмемъ хотя бы послѣдній изъ этихъ ходовъ; тогда продолженіе будетъ такое: такъ какъ положеніе, съ которымъ приходится считаться игроку **B** есть **d**, **f**, **g**, то: 1) если **B** сыграетъ такъ, что поставитъ свою шашку на какое-нибудь уже занятое поле, напр. **g—f**, или **g—d**, или **f—d**, то **A**, не трогая лежащихъ вмѣстѣ двухъ шашекъ, поставитъ третью (одинокую) шашку на послѣднее поле. Если же **B** поставитъ шашку **d** на **c**, то **A** передвинетъ вторую шашку въ **c** и, слѣдуя тактическимъ пріемамъ, аналогичнымъ тѣмъ, которые употреблялись въ игрѣ «Nim», **A** *долженъ непремѣнно выиграть;* 2) если **B**, отказавшись отъ своего перваго хода (при которомъ онъ произвелъ удвоеніе шашекъ), сдѣлаетъ ходъ **f—e**, то положеніе, съ которымъ будетъ имѣть дѣло **A** передъ своимъ вторымъ ходомъ, можетъ быть: **d**, **e**, **g**, или **3**, **4**, **6**.

Въ такомъ случаѣ **A** дѣлаетъ ходъ **d—c** и приходитъ къ «правильному» положенію **c**, **e**, **g**, или **2**, **4**, **6**. Изъ всѣхъ возможныхъ продолженій игры мы, для примѣра, выберемъ такое:

A.	B.
	d—f (**c**, **e**, **f**, или 2, 4, 5).
Непремѣнно: **c—b** (**b**, **e**, **f**, или 1, 4, 5).	Хотя бы: **e—d** (**b**, **d**, **f**, или 1, 3, 5).
Непремѣнно: **f—c** (**b**, **d**, **c**, или 1, 3, 2).	Хотя бы: **c—a** (**b**, **d**, или 1, 3).
Непремѣнно: **d—b** (**b**, **l**, или 1, 1).	**b—a** (**b**, или 1).
b—a, и **A выигрываетъ**.	

При желаніи эту игру можно вести не на одномъ рядѣ шахматной доски, а на цѣлой доскѣ, или даже на двухъ доскахъ. Въ такомъ случаѣ необходимо только установить порядокъ, въ которомъ должно слѣдовать одно поле за другимъ.

Задача 3. Кто долженъ выиграть при начальномъ положеніи **c**, **f**, **h**?

II. Изъ многихъ другихъ видоизмѣненій игры «Nim» мы опишемъ еще одинъ весьма распространенный въ Германіи видъ этой игры, который отличается, главнымъ образомъ, тѣмъ, что *начальное число* спичекъ берется совершенно *произвольно*.

Сущность игры состоитъ въ слѣдующемъ:

На столъ кладется произвольное число спичекъ (въ одну кучку) и двое играющихъ поочередно, берутъ спички до тѣхъ поръ, пока не будутъ взяты всѣ; при этомъ каждый изъ игроковъ имѣетъ право брать каждый разъ не болѣе трехъ спичекъ и не менѣе одной. Проигравшимъ считается тотъ, кому придется взять послѣднюю спичку.

Для того, чтобы рѣшить вопросъ, кто изъ играющихъ *долженъ* въ этомъ случаѣ одержать побѣду, мы разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда *при началѣ* игры въ кучкѣ имѣется всего **5** спичекъ.

Если игрокъ **A** возьметъ 1 спичку, то **B**, взявши 3 спички, заставитъ **A** взять послѣднюю спичку, т.-е., проиграть игру.

То же случится, если **A** возьметъ 2 или 3 спички: тогда **B** беретъ 2 или 1 спичку, и послѣдняя спичка остается опять для **A**.

Такимъ образомъ, при начальномъ положеніи въ **5** спичекъ, выигрываетъ тотъ, кто дѣлаетъ **второй** ходъ.

Читателю не трудно убѣдиться, разсуждая совершено такимъ же образомъ, что при начальномъ положеніи въ **9** (5+4) спичекъ, окончательный результатъ игры окажется *такой же*,

какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т.-е., проиграетъ **А** (если, конечно, онъ начинаетъ).

Пояснимъ это хотя бы на такомъ примѣрномъ ходѣ игры:

Начальное положеніе: 9.

А.	**В.**
1) Беретъ хотя бы 2 спички;	Беретъ *непремѣнно* 2 спички.
2) Беретъ хотя бы 1 спичку;	Беретъ *непремѣнно* 3 спички.
3) Беретъ 1 (послѣднюю) спичку, т.-е., проигрываетъ.	

Изъ сказаннаго ясно, что для игрока **А** (начинающаго игру) *роковыми* являются числа **5** и **9**, $9=5+4$). А если это такъ, то для него такую же опасность будутъ представлять числа:

13, т.-е., $9+4$;
17, т.-е., $13+4$;
21, т.-е., $17+4$ и т. д.

Однимъ словомъ, если начальное положеніе выражается однимъ изъ членовъ такой ариѳметической прогрессіи (разность=4):

1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37;...,

то *непремѣнно проиграетъ тотъ изъ игроковъ, который сдѣлаетъ первый ходъ.*

Отсюда и вытекаетъ **практическое привило,** при соблюденіи котораго всякій, знакомый съ нимъ, имѣетъ возможность *навѣрняка* обыграть противника, если, конечно, тотъ не посвященъ въ теорію этой игры.

Правило. Если начальное число спичекъ, выбранное совершенно произвольно, настолько велико, что опредѣлить его съ перваго взгляда, не трогая кучки спичекъ, не представляется возможнымъ, то вы можете вести игру совершенно произвольно до тѣхъ поръ, пока число спичекъ въ кучкѣ не уменьшится настолько, что вы получите возможность уменьшить кучку до одного изъ помѣщенныхъ выше чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію. Когда, такимъ образомъ, число спичекъ въ кучкѣ окажется равнымъ, напр. **13**, или **9**, или **5**, то вашему противнику не останется сдѣлать ничего другого, какъ сдаться.

Само собою разумѣется, что, если случится, что *оба* игрока одинаково хорошо знакомы съ описанной теоріей игры, то побѣдителемъ окажется *тотъ* изъ нихъ, *кому первому удастся опредѣлить число спичекъ въ кучкѣ въ данный моментъ,* такъ какъ тогда онъ получитъ возможность немедленно свести это число къ одному изъ членовъ вышеупомянутой прогрессіи.

Отвѣты на задачи.

Къ задачѣ 1. «Основныя» числа, которыми слѣдуетъ здѣсь воспользоватся, суть: **1**, **2**, **4**, **8**, **16**.

$$\begin{aligned} \mathbf{7} &= & 4+2+1 \\ \mathbf{25} &= 16+8 & +1; \end{aligned}$$

слѣдовательно третье число составится такъ:

$$16+8+4+2=\mathbf{30};$$

отсюда и получается искомое «правильное» положеніе: **7**, **25**, **30**.

Къ задачѣ 2. Выиграть долженъ тотъ изъ играющихъ, который дѣлаетъ второй ходъ, такъ какъ начальное положеніе должно быть признано «правильнымъ»:

$$\begin{aligned} 3 &= & 2+1 \\ 17 &= 16 & +1 \\ 18 &= 16 & +2 \end{aligned}$$

Что же касается «основныхъ» чиселъ, то см. отвѣтъ къ задачѣ 1.

Къ задачѣ 3. Выигрываетъ **B**, такъ какъ начальное положеніе **c**, **f**, **h**, или **2**, **5**, **7** должно быть признано «правильнымъ».

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Отъ редактора 3

Введеніе 5

Описаніе игры и ея краткій теоретическій очеркъ 8

Теоретическое обоснованіе игры 14

Практическія указанія къ игрѣ «Nim». 28

Видоизмѣненія игры «Nim» 32

Отвѣты на задачи 39

5-й выпускъ.

Магическіе квадраты. Ариѳметическіе курьезы.

Съ 17 чертежами.

Содержаніе: Магическіе квадраты—Введеніе.—Простѣйшіе магическіе квадраты.—Магическіе квадраты съ нечетнымъ и съ четнымъ числомъ клѣтокъ. **Ариѳметическіе курьезы.**—Какъ считали наши предки.—Любопытныя числа и дѣйствія съ ними.—Степени числа 11.—Треугольныя и квадратныя числа.—Прогрессіи.

Цѣна **20** коп. (76 стр.).

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ У КНИГОИЗДАТЕЛЬНИЦЫ
А. С. ПАНАФИДИНОЙ.
(Лялинъ пер., соб. домъ, Тел. 32—87).

ВО ВСѢХЪ КНИЖНЫХЪ МАГАЗИНАХЪ

ПРОДАЮТСЯ СЛѢДУЮЩІЯ НОВЫЯ КНИГИ

Н. Н. АМЕНИЦКАГО:

Н. Н. Аменицкій и И. П. Сахаровъ.

ЗАБАВНАЯ АРИѲМЕТИКА. Хрестоматія для развитія сообразительности дѣтей въ семьѣ и школѣ.

Изданіе 4-е, дополненное.

Вып. I. Младшій возрастъ. Цѣна **20** коп.
Вып. II. Средній возрастъ. Цѣна **30** коп.
Вып. III. Старшій возрастъ. Цѣна **30** коп.

Н. Н. Аменицкій.

ФИЗИКА въ примѣненіи **къ обыденнымъ явленіямъ и вопросамъ жизни.** (Съ приложеніемъ главнѣйшихъ физическихъ законовъ и новаго ученія о твердости тѣлъ). Пособіе для мужскихъ и женскихъ среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ (по Пол. 1872 г.) училищъ при изученіи и повтореніи курса физики. Цѣна **50** коп.

ПРОДАЮТСЯ СЛѢДУЮЩІЯ НОВЫЯ ИЗДАНІЯ:

Н. Н. Аменицкій (ред.).

1) Новый сборн. ариѳметическихъ задачъ

въ связи **съ краткими теоретическими опредѣленіями и правилами ариѳметики. Вып. I. Цѣлыя числа.—Дроби:** а) *обыкновенныя* (простыя), b) *десятичныя* (съ примѣненіемъ къ метрической системѣ мѣръ и вычисленію процентовъ).

Изданіе 2-ое, дополненное и исправленное.

Съ рисунками и чертежами

Къ особенностямъ даннаго задачника относятся: 1) степень трудности громаднаго большинства изъ помѣщенныхъ задачъ разсчитана на учащихся со способностями не выше среднихъ. 2) Въ концѣ каждаго изъ трехъ главныхъ отдѣловъ составители признали раціональнымъ помѣстить отдѣлы: **„Въ часы досуга“**, содержащіе въ себѣ задачи *забавнаго и остроумнаго характера*, требующія отъ учащихся сообразительности и находчивости.

Ученымъ Комитетомъ при Свят. Синодѣ **ДОПУЩЕНЪ** *къ классному употребленію въ духовн. и второкласcн. училищахъ и въ Епархіальныхъ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ. (См. Синод. Вѣд. № 6. 1910 г.).*

Учебнымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **ДОПУЩЕНЪ** *въ 1-мъ изд. къ классному употребленію во* **ВСѢХЪ** *средне-учебныхъ заведеніяхъ. (Журн. М. Н. П., мартъ 1911 г.).*

Предназнач. **для гимназій, институтовъ, реальныхъ и коммерч. училищъ, второклассныхъ училищъ духовныхъ и по положенію 1872 года.**

Составлено подъ редакціей преподавателя Московской женской гимназіи Винклеръ **Н. Н. Аменицкаго** *„Кружкомъ Московскихъ преподавателей“*.

Цѣна 1 выпуска **50** коп. Москва, 1912 г.

Н. Н. Аменицкій.

2) Новый сборн. Ариѳметическихъ задачъ

въ связи **съ краткими теоретическими опредѣленіями и правилами ариѳметики. Вып. II.** *Пропорціи и общія правила: тройное, прав. пропорціональн. дѣленія, учетъ векселей и смѣшенія.* Цѣна **35** коп.

Учебнымъ Комитетомъ при Свят. Синодѣ **ДОПУЩЕНЪ** *къ классному употребленію въ духовн. и второкласcн. училищахъ и въ Епархіальныхъ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ. (См. Синод. Вѣд. № 6, 1910 г.).*

Учебнымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **ДОПУЩЕНЪ** *въ 1-мъ изд. къ классному употребленію во всѣхъ средне-учебныхъ заведеніяхъ.*

ТИПОГРАФІЯ РУССКАГО ТОВАРИЩЕСТВА, МОСКВА.